

非光滑三球链系统碰撞动力学分析

孙华璟,程勇波,张欣刚,刘彦平,张树翠,姚文莉

(青岛理工大学理学院,山东 青岛 266525)

摘要:三球链碰撞动力学是颗粒系统多体接触仿真的基础问题。以往研究多局限于光滑系统,且常采用简化的碰撞模式分析含摩擦的非光滑接触问题,未能准确反映能量耗散与黏滞-滑动切换机制。本研究运用冲量分析方法对三球链系统开展非光滑建模,将碰撞描述为冲量增加的过程,对切向速度、法向冲量和法向力做功的演化过程开展分析,给出了黏滞-滑动状态切换的解析判据。仿真结果揭示了球链系统中的二次碰撞现象,定量分析了质量比和摩擦系数对二次碰撞的影响规律,并开展了实验验证。研究表明,该方法能够精细化处理多点摩擦碰撞过程,有效避免传统罚函数法的刚性问题,保证解的唯一性,为颗粒系统非光滑摩擦接触问题的精细化分析提供新途径。

关键词:三球链系统;多点碰撞;摩擦;非光滑法;冲量分析

中图分类号:O313.4

文献标志码:A

Analysis of nonsmooth collision dynamics of three-ball chain system

SUN Huajing, CHENG Yongbo, ZHANG Xingang, LIU Yanping, ZHANG Shucui, YAO Wenli

(School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

Abstract: The dynamics of three-ball chain collisions is a fundamental problem in multibody contact simulation of granular systems. Previous studies, primarily focusing on smooth systems or adopting simplified collision models to analyze nonsmooth contact problems with friction, fail to accurately reflect energy dissipation and the stick-slip switching mechanism. By employing the impulse analysis method, this study first carried out the non-smooth modeling of the three-ball chain system. By describing the collision as an increase in impulse, it analyzed the evolution of tangential velocity, normal impulse, and work done by normal forces and provided an analytical criterion for stick-slip state switching. Simulations revealed the phenomenon of secondary collision in the ball-chain system and investigated quantitatively the effects of mass ratio and coefficient of friction on secondary collisions. The results were finally validated by experiments. The study shows that the proposed method enables the precise modeling of multi-point frictional collisions, effectively avoids the stiffness problem of the traditional penalty function methods, and ensures the uniqueness of the solution. This work provides a novel pathway for the refined analysis of nonsmooth frictional contact problems in granular systems.

Key words: three-ball chain system; multipoint collision; friction; nonsmooth method; impulse analysis

颗粒碰撞问题普遍存在于自然界和各工程领域,例如工业颗粒的搅拌、玉兔号月球车在月表行走等。颗粒间的碰撞规律是散体动力学研究的一个重点和难点^[1]。目前解决接触碰撞等动力学问题大多采用微分原理建模,并采用柔化模型^[2]来表征接触点的局部变形,将接触力视为与接触点变形量、能量耗散等相关的罚函数,进而将接触力作为主动力代入动力学方程^[3]。采用罚函数法描述的动力学模型形式简洁,

收稿日期:2025-02-24

基金项目:国家自然科学基金项目(12272197,12202224);山东省自然科学基金项目(ZR2022MA066)

作者简介:孙华璟(1998—),女,山东淄博人,硕士研究生,主要从事多体系统动力学与控制的研究。

张树翠(1986—),女,河北邢台人,讲师,博士,主要从事多体系统动力学与控制的研究,本文通信作者。

E-mail:shucuijulu@126.com

但由于接触刚度极大导致数值积分步长受限^[4],在计算效率要求极高的复杂系统中易产生病态问题。

国内外学者对多刚体的非光滑碰撞问题进行了大量研究,但多利用恢复系数处理碰撞,将碰撞看作极短时间内接触点位置不变而速度发生突变的瞬态事件。将碰撞划分为法向和切向,仅考虑碰撞前后速度的变化,分别在法向采用速度恢复系数、切向采用切向恢复系数来表示碰撞前后的速度关系,但对碰撞时切向的黏滞-滑动切换问题缺乏精细化的分析,且在计算多点碰撞时易出现无解或多解。Keller^[5]首先采用法向冲量代替时间作为碰撞的描述参数,给出了两刚体的冲量碰撞理论。Pfeiffer等^[6]将法向相对加速度和接触力采用线性互补条件描述,切向采用摩擦模型,内嵌碰撞恢复系数^[7]求解碰撞问题。平面两刚体含摩擦的碰撞包含五种碰撞类型^[8],Djerassi^[9]提出由碰撞点的入射角和库仑摩擦系数可以直接确定碰撞类型,并给出唯一解。Cross^[10-11]通过实验证明相对初始速度和初始间隙对刚体碰撞动力学行为产生影响。以上方法主要针对两刚体的单点碰撞问题,但碰撞点可能是黏滞的或滑动的,并伴随着黏滞-滑动状态切换问题^[12]。

多球链系统的碰撞涉及更复杂的多点摩擦碰撞问题^[13-14]。Ceanga等^[15]提出由脉冲相关比确定系统碰撞后的速度,Zhao等^[16-17]利用步进冲量算法研究了多球系统碰撞问题的数值解法,但二者均未考虑摩擦带来的影响。Rodriguez等^[18]在考虑摩擦的情况下提出一种全局能量恢复系数求解多球链系统碰撞后的速度,侧重于对碰撞前后运动状态的求解,但是仅考虑了碰撞时接触点的滑动状态,忽略了黏滞-滑动状态切换问题,对碰撞过程缺乏精细化的解析。理想牛顿摆代表的三球链系统是能反映多点碰撞动力学行为的最基本系统,由动量定理和恢复系数可以解析得到球链系统碰撞后三球的运动状态。而实际中,碰撞瞬间接触点切向力产生的摩擦力矩将引发球链系统复杂的运动,这种相互作用给系统带来的影响是不可忽略的。因此,在研究球链系统的碰撞时,必须要考虑接触点间的摩擦以及伴生的黏滞-滑动状态切换问题。球链系统碰撞既是动力学领域的经典问题,其底层力学机制在多学科领域均发挥着重要的作用。一些学者受牛顿摆的启发,利用接触力模型和离散元模拟,得到一维颗粒链中颗粒转动的规律^[19]。另一些学者基于牛顿摆模型,在球间隙加入液体材料,得到黏性材料对球链碰撞动力学行为的影响^[20]。

与以往用冲量方法处理球链系统多点碰撞的研究不同,本研究考虑碰撞中摩擦引起的黏滞-滑动切换问题,对碰撞物理过程进行数值重构。利用冲量方法对三球链系统摩擦碰撞问题进行非光滑动力学建模,将碰撞表征为法向冲量增加的过程,详细推导了冲量表征的接触点状态演化方程。法向上将碰撞划分为压缩阶段和恢复阶段,采取能量恢复系数而非速度恢复系数,描述碰撞过程中的能量耗散;切向上通过构建摩擦碰撞的状态演化方程,解析得到了黏滞-滑动切换的判据,克服了牛顿恢复系数方法中解的能量不协调的问题,通过精细化处理多点碰撞过程,保证了解的唯一性。通过实验证实了数值计算的准确性,对冲量描述的非光滑三球链系统碰撞过程进行数值模拟,得到了初始角速度和摩擦系数对黏滞-滑动切换点的影响,以及不稳定黏滞状态下的定向滑动方向规律。研究了碰撞过程中产生的二次碰撞及其对三球链速度传递的影响,得到质量和摩擦系数对二次碰撞的影响。

1 摩擦碰撞的状态演化方程

采用悬挂模型建立共线三球链系统的摩擦碰撞模型,如图1所示。均质刚性球体半径均为 r ,质量分别为 m_1, m_2, m_3 ,1球、2球间摩擦系数为 μ_1 ,2球、3球间摩擦系数为 μ_2 。小球与长度为 L 的轻质绳相连,忽略绳索的柔性变形,取绳与 x 轴的夹角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 为系统描述参数。球心之间的接触距离为 $d=2r$ 。假设碰撞过程在瞬间完成,碰撞时物体不发生任何形变,接触点的位置不变,所有能量传递仅通过接触点的冲量完成,通过冲量直接改变物体的动量。小球之间为理想对心碰撞,并约定摆动过程中球心与绳始终共线,忽略球体材料或介质阻尼的

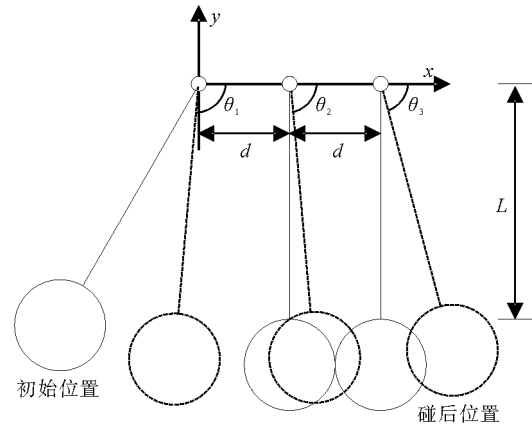


图1 三球链系统模型

Fig. 1 Three-ball chain system model

影响以及接触区域的范围,将小球的接触简化为点接触,从而使用库仑摩擦定律来简化摩擦分析过程。

小球的转动惯量 $J_k = 0.4 m_k r^2 + m_k (L+r)^2, k=1,2,3$, 系统的广义质量阵 $\mathbf{M} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ 。设 $\ddot{\mathbf{u}}$ 是系统的广义加速度向量, λ_n 为碰撞时接触点的法向接触力, λ_τ 为切向摩擦力, $\mathbf{K}_n$ 、 $\mathbf{K}_\tau$ 分别是接触力和摩擦力的广义力变换矩阵。

在碰撞的极短时间内对动力学方程积分,并考虑到外力的冲量远小于碰撞力的冲量,得到

$$\mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_n p_n + \mathbf{K}_\tau p_\tau. \quad (1)$$

式中: p_n 为法向碰撞力冲量, p_τ 为切向摩擦力冲量。

尽管 2 球、3 球初始接触,但考虑到 1 球、2 球的碰撞冲击波传递到 3 球后,2 球、3 球才开始经历碰撞过程。因此,首轮碰撞实际上是递次发生的,只是由于碰撞过程在极短的时间内完成,宏观上表现为同时发生。因此,将球链系统的多点碰撞过程视为一系列单点碰撞过程,则当 1 球和 2 球碰撞时,接触力的广义力变换阵可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_n = [- (L+r) & (L+r) & 0]^T, \\ \mathbf{K}_\tau = [-r & -r & 0]^T. \end{cases} \quad (2)$$

2 球和 3 球之间接触力的广义力变换阵可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_n = [0 & - (L+r) & (L+r)]^T, \\ \mathbf{K}_\tau = [0 & -r & -r]^T. \end{cases} \quad (3)$$

碰撞引起的广义速度变化量为:

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_\tau] \begin{bmatrix} p_n \\ p_\tau \end{bmatrix}, \quad (4)$$

接触点法向速度和切向速度的增量可表示为:

$$\begin{bmatrix} \Delta v_n \\ \Delta v_\tau \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n^T \\ \mathbf{K}_\tau^T \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_\tau] \right\} \begin{bmatrix} p_n \\ p_\tau \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{K} \begin{bmatrix} p_n \\ p_\tau \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式中,定义矩阵 $\mathbf{K}$ 为相邻两物体 i, j 在碰撞阶段的冲量刚度矩阵,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (L+r)^2 (1/J_i + 1/J_j) & (L+r)r (1/J_i - 1/J_j) \\ (L+r)r (1/J_i - 1/J_j) & r^2 (1/J_i + 1/J_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

式(1)中的法向冲量 p_n 和切向冲量 p_τ 都是标量, $p_n \geq 0$ 且在整个碰撞过程中单调递增,可将法向冲量 p_n 作为描述整个碰撞过程的参数。式(5)两边同时对法向冲量 p_n 求导得:

$$[dv_n/dp_n \quad dv_\tau/dp_n]^T = \mathbf{K} [1 \quad dp_\tau/dp_n]^T. \quad (7)$$

式(7)揭示了碰撞过程中速度参数与法向冲量之间的微分关系。实践发现,如果忽略碰撞的局部演化过程,仅使用恢复系数来量化碰撞前后的速度关系,容易造成碰撞后系统能量不降反升的矛盾出现。为了使碰撞模型更符合碰撞的物理过程,且保留牛顿碰撞模型的简洁形式,可将碰撞过程细分为两个阶段,一是将法向相对速度抑制为零的压缩阶段,二是接触分离的恢复阶段。按照经典的碰撞近似理论,碰撞物体简化为只考虑碰撞点局部变形的准刚体,碰撞的法向方向分为压缩和恢复两个过程,故认为碰撞压缩和恢复过程总是存在的。下面将结合式(7)来研究各物理量随法向冲量的演化规律。碰撞过程中,接触点可能存在滑动和黏滞两种摩擦状态,对此分别进行分析。

1.1 切向滑动的状态演化方程

接触点切向受到滑动摩擦力时,接触点将处于滑动摩擦状态;而当接触点处受到的切向力为静摩擦力时,接触点将处于黏滞状态。滑动状态下,定义 δ 为符号函数,将库仑摩擦定律的冲量形式代入式(7)得:

$$[dv_n/dp_n \quad dv_\tau/dp_n]^T = \mathbf{K} [1 \quad -\mu\delta]^T. \quad (8)$$

采用能量恢复系数 e 、压缩和恢复阶段的法向冲量做功 w_n^{comp} 和 w_n^{exp} 定义碰撞结束的条件:

$$\begin{cases} w_n^{\text{exp}} = -e^2 w_n^{\text{comp}}, \\ 0 < e \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

由 $dp_n/dt = \lambda_n$ 可以得到法向冲量做功 w_n 与法向冲量的微分关系:

$$d\omega_n/dp_n = v_n. \quad (10)$$

按照定义^[21],碰撞的压缩阶段结束的标志是相对法向速度 $v_n = 0$,且法向相对速度单调递增,因此可将 v_n 作为刻画碰撞压缩过程的参数。

结合式(8),可将法向冲量随法向相对速度的变化率表示为:

$$dp_n/dv_n = 1/(K_{11} - K_{21}\mu\delta). \quad (11)$$

进一步利用算子等式 $\frac{d}{dv_n} = \frac{d}{dp_n} \frac{dp_n}{dv_n}$, 可得到碰撞压缩阶段的状态演化方程:

$$\begin{cases} dv_\tau/dv_n = (K_{21} - K_{22}\mu\delta)/(K_{11} - K_{12}\mu\delta), \\ d\omega_n/dv_n = v_n/(K_{11} - K_{12}\mu\delta), \\ dp_n/dv_n = 1/(K_{11} - K_{12}\mu\delta). \end{cases} \quad (12)$$

碰撞压缩阶段的初始条件为:

$$v_n = v_n^0, v_\tau = v_\tau^0, \omega_n = 0, p_n = 0. \quad (13)$$

式中: v_n^0, v_τ^0 分别为碰撞初始时刻接触点的相对法向速度、相对切向速度。

对式(12)进行数值积分,其终止条件是 $v_n = 0$,得到压缩阶段结束时各状态变量 $v_n^{\text{comp}}, v_\tau^{\text{comp}}, \omega_n^{\text{comp}}, p_n^{\text{comp}}$ 。根据式(9),碰撞的恢复阶段结束的标志为:

$$\omega_n - (1 - e^2)\omega_n^{\text{comp}} = 0. \quad (14)$$

因此,选取 ω_n 作为恢复阶段的描述参数更为方便。利用算子等式 $d/d\omega_n = (d/dv_n) \cdot (dv_n/d\omega_n)$, 结合式(12)得到碰撞恢复阶段的状态演化方程为:

$$\begin{cases} dv_\tau/d\omega_n = (K_{21} - K_{22}\mu\delta)/v_n, \\ dv_n/d\omega_n = (K_{11} - K_{12}\mu\delta)/v_n, \\ dp_n/dv_n = 1/v. \end{cases} \quad (15)$$

式(15)中,碰撞压缩阶段的结束条件即为碰撞恢复阶段的初始条件。对式(15)数值积分,并结合式(4)可得碰撞后三球的广义速度

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \dot{\mathbf{u}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{u}}. \quad (16)$$

1.2 切向黏滞的状态演化方程

碰撞过程中,若接触点的相对速度演化为 0,且静摩擦力足以维持相对静止,则碰撞点将进入黏滞状态。此时,判断黏滞状态是否稳定的物理依据是检验如下不等式是否成立:

$$(dp_\tau/dp_n)^2 \leq \mu^2. \quad (17)$$

此时式(8)不再成立,但式(7)恒成立,且有 $dv_\tau/dp_n = 0$, 可得:

$$dp_\tau/dp_n = -K_{12}/K_{22}. \quad (18)$$

将式(18)代入式(17),得到黏滞状态是否稳定的判据

$$K_{21} \leq \mu^2 K_{22}. \quad (19)$$

若式(19)成立,则碰撞将处于稳定的黏滞状态,反之则处于滑动状态。

在碰撞的压缩阶段,对式(12)进行修改,可得:

$$dv_n/dp_n = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})/K_{22}. \quad (20)$$

在黏滞状态下,碰撞压缩阶段的状态演化方程可改写为:

$$\begin{cases} d\omega_n/dv_n = v_n K_{22}/(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}), \\ dp_n/dv_n = K_{22}/(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}). \end{cases} \quad (21)$$

碰撞恢复阶段的状态演化方程可改写为:

$$\begin{cases} dv_n/d\omega_n = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})/(v_n K_{22}), \\ dp_n/d\omega_n = 1/v_n. \end{cases} \quad (22)$$

此时,静摩擦状态下切向摩擦力的冲量将无法直接求出,但可得:

$$\begin{cases} dv_n/dp_n = 1/(K^{-1})_{11}, \\ dp_\tau/dp_n = (K^{-1})_{21}/(K^{-1})_{11}. \end{cases} \quad (23)$$

式中, $(K^{-1})_{ij}$ 表示 K 的逆阵的第 i 行第 j 列元素。由此得到摩擦力冲量关于法向相对速度的演化方程:

$$dp_\tau/dv_n = (dp_\tau/dp_n) \cdot (dp_n/dv_n) = (K^{-1})_{21}. \quad (24)$$

由式(21)可见, 法向碰撞力冲量 p_n 与法向相对速度 v_n 呈线性关系, 由碰撞的初始条件(式(13)), 可进一步得到碰撞结束后的切向摩擦力冲量表达式:

$$p_\tau = (K^{-1})_{21}(v_n - v_n^0). \quad (25)$$

由式(25)并结合式(4)和式(16), 可得到碰撞后系统的广义速度 $\dot{u}_1$ 。

当接触点的相对切向速度为 0 时, 在碰撞的压缩阶段和恢复阶段均会出现黏滞-滑动状态切换问题, 可分别对两个阶段的摩擦状态进行判断。以式(19)为判据, 可以判断该点在压缩和恢复阶段是否处于稳定的黏滞状态, 若满足式(19)的不等式, 则接触点将从滑动状态切换为稳定的黏滞状态, 并且保持稳定的黏滞状态直至碰撞结束。摩擦碰撞演化过程的分析流程如图 2 所示。

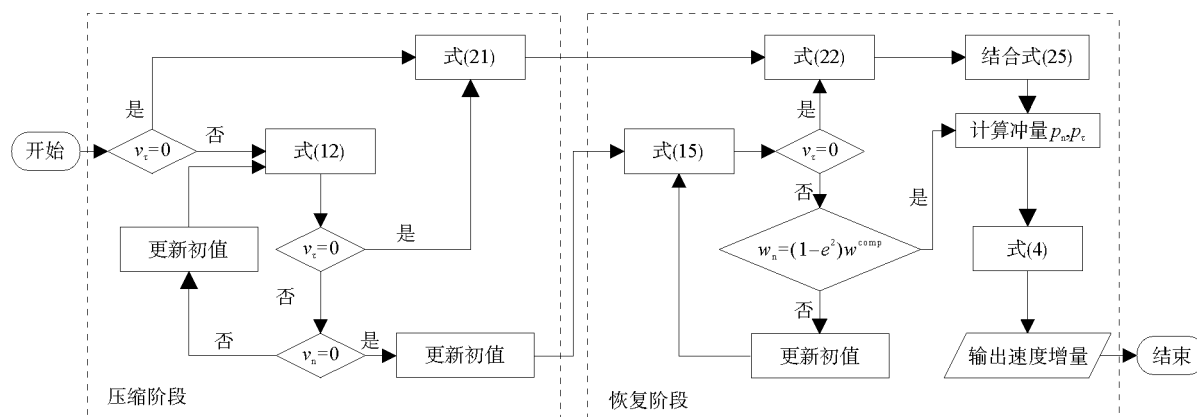


图 2 碰撞过程分析流程图

Fig. 2 Flow chart of the collision process analysis

2 实验测试

采用 i-speed 高速摄像机(帧率 1 087 fps)记录牛顿摆系统的运动过程, 结合 Tracker 运动捕捉系统实时追踪小球质心运动轨迹和速度, 实验装置如图 3 所示。

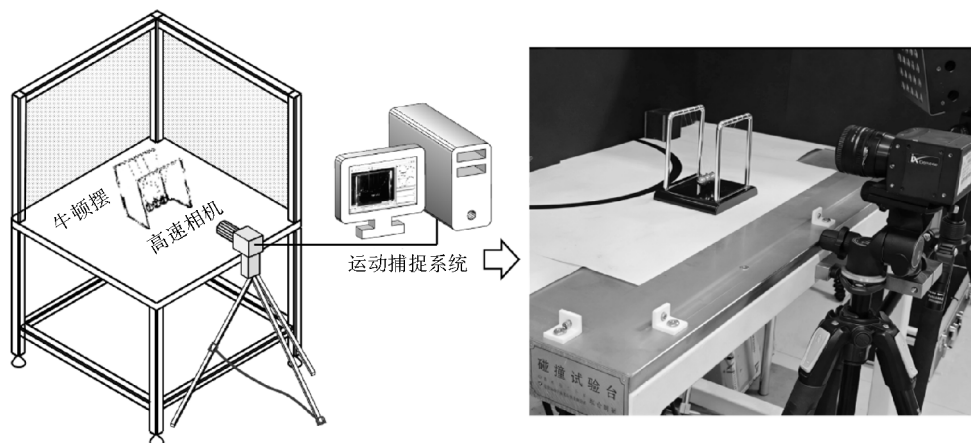


图 3 三球链系统碰撞实验

Fig. 3 Collision experiment of the three-ball chain system

实验装置中三小球材质为实心轴承钢,质量均为 0.021 kg,半径为 0.01 m,纳米尼龙材质绳索长度为 0.11 m,两接触点摩擦系数通过表面粗糙度仪标定为 0.005。令 1 球在绳索与竖直方向分别呈 53° 、 45° 、 25° 、 14° 处无初速度落下,并与静止且互相接触的其余两个小球发生碰撞。实验前通过校准确保初始对心误差小于 0.5 mm,摆绳悬挂高度调节至精度 ± 0.01 mm。通过实验测定能量恢复系数是一个非常复杂的工作,Stronge^[22]认为在对心碰撞、正碰撞、光滑碰撞或者摩擦斜碰撞中滑动方向不改变的任何一种情形下,牛顿恢复系数、冲量恢复系数、能量恢复系数是等价的。本实验中小球总是对心碰撞,因此在此处可以用牛顿恢复系数的测定值近似能量恢复系数。实验测定了牛顿恢复系数为 0.95,对于钢球这样的准弹性碰撞,用牛顿恢复系数近似能量恢复系数也能达到较为满意的效果。运动捕捉系统通过标记点定位各小球的中心,并标定为参考点。将实验与数值仿真结果进行对比,其坐标变化曲线如图 4 所示。

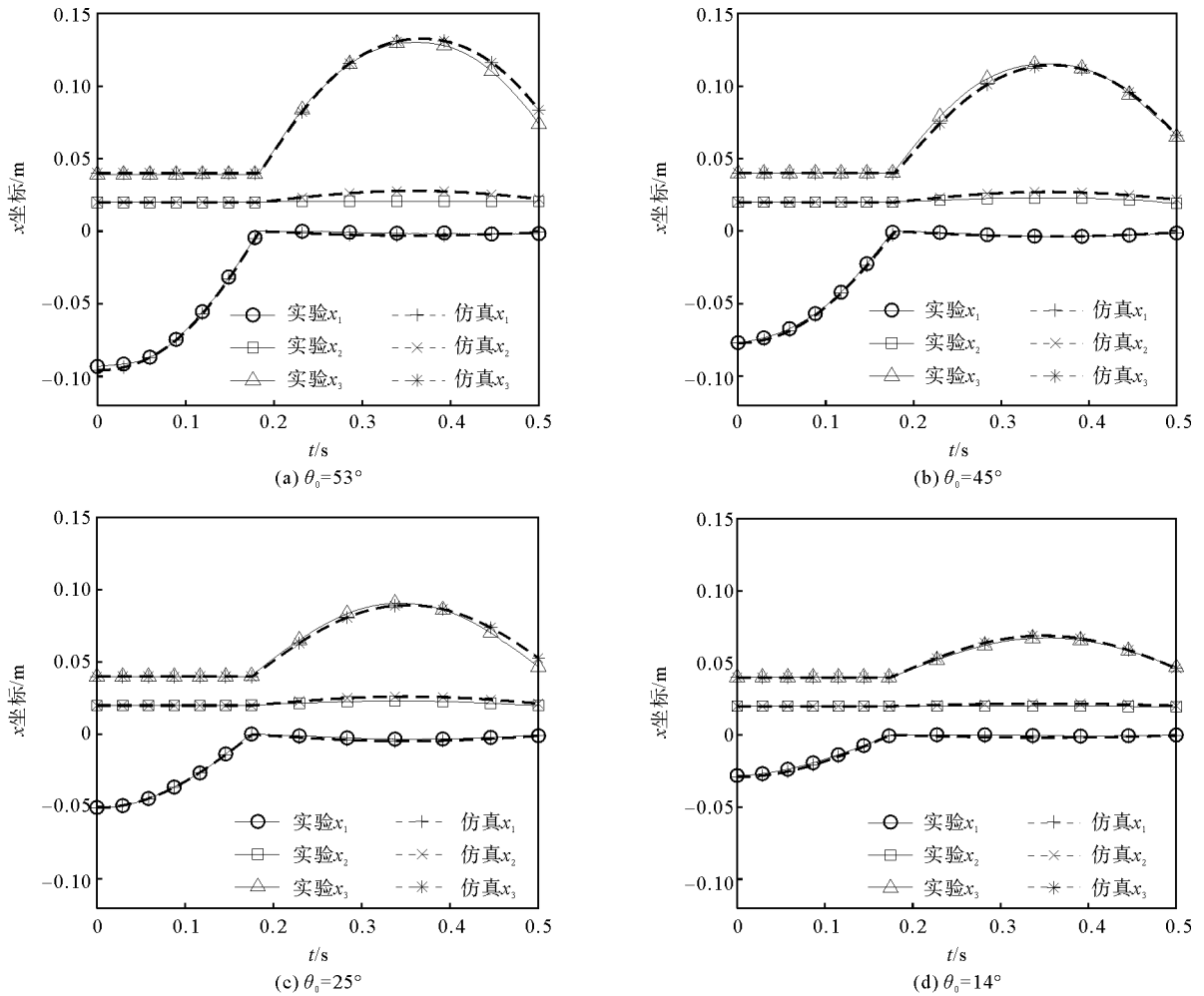


图 4 实验与数值仿真的坐标对比

Fig. 4 Coordinates comparison between experiment and numerical simulation

图 4 中 x_1 、 x_2 、 x_3 分别代表 1 球、2 球和 3 球。从各曲线的宏观变化规律来看,实验结果和仿真结果基本吻合。且 1 球的摆幅越小,两种结果的吻合程度越高。从运动形式来看,碰撞后 1 球反弹,2 球向前微幅摆动,3 球向前大幅摆动。由于摆绳不具备抗弯能力,随着 1 球的初始摆动角度越大,保持球心与摆绳共面的难度就越大,且摆绳和小球还呈现复摆的特点,因此与仿真结果存在微幅差异。例如在图 5 中,小摆角($\theta_0 = 14^\circ$)时,3 球速度的实验和仿真误差仅为 0.04%;而大摆角($\theta_0 = 53^\circ$)下,由于摆绳扭动和空气阻尼,误差增至 1.48%。1 球初始摆角低于 45° 时,2 球在碰撞结束后均获得了向前摆动的角速度,而当初始摆角提高到 53° 后,2 球、3 球的实验值均低于仿真值,但 1 球向后微幅摆动的趋势相同。另外,实验过程中摆绳也出现了频率较高的弹性振荡,在后续碰撞过程中,摆球的扭动现象显著,对实验结果影响较大。

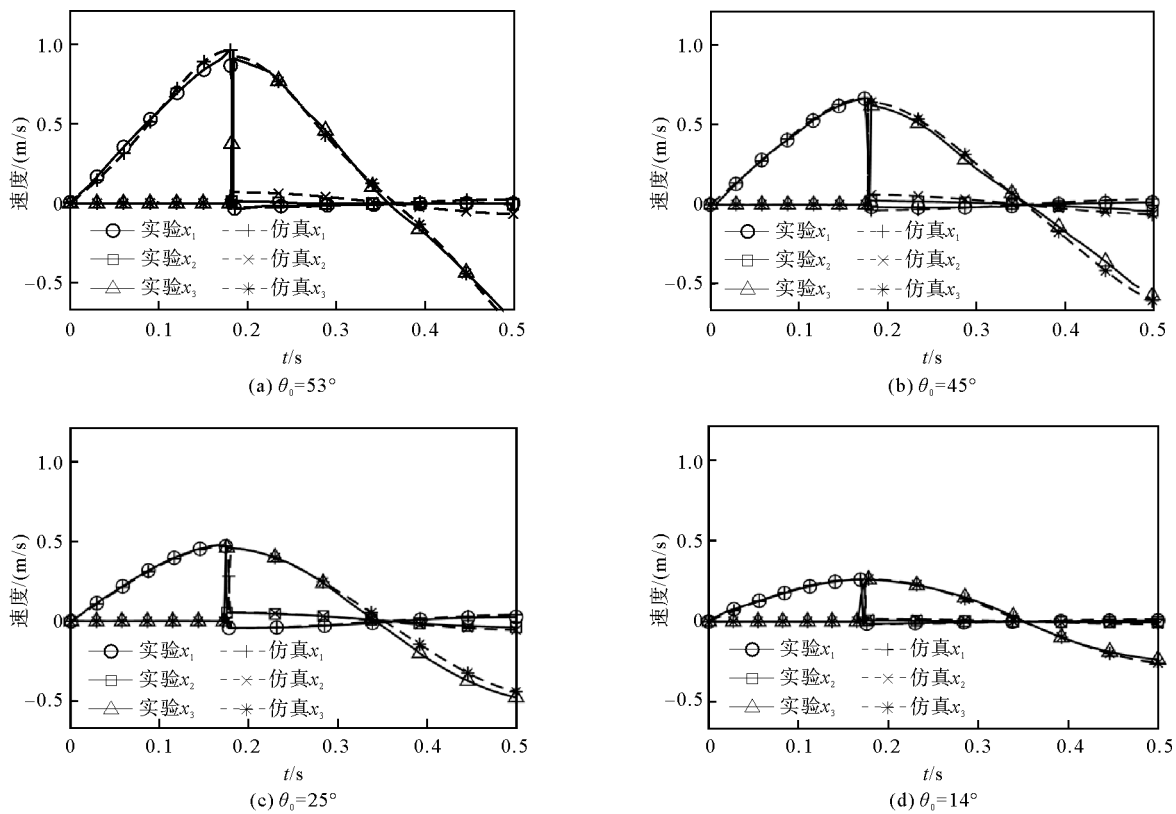


图 5 实验与数值仿真的速度对比

Fig. 5 Velocity comparison between experiment and numerical simulation

对比图 4(a)和图 5(a)的实验结果可见,虽然 2 球在碰撞后未产生显著的位移,但 3 球也并未获得 1 球的全部速度。可以判定,实验结果和仿真结果的差异是由测量误差带来的。另外,由于绳索缠绕在上部挂杆上,圆弧过渡段绳索和挂杆的摩擦对实验结果也有一定的影响,因此在小摆幅碰撞条件下得到的实验结果和仿真结果更为吻合。

图 6 展示了三球链系统碰撞实验的瞬时构型。在首轮碰撞过程中,1 球与静止的 2 球和 3 球发生碰撞,球链系统内三个小球完成速度交换后 3 球被弹离,1 球和 2 球经历二次碰撞,但时间极短。随后球链系统进入自由运动阶段,在 0.502 s 时,三球链系统发生第二轮碰撞,3 球撞击自由摆动的 1 球和 2 球。1 球被弹离后,2 球和 3 球经历二次碰撞,同样时间极短,随后三球系统进入下一轮自由运动阶段。实验现象和仿真结果基本吻合。

3 数值算例

3.1 三球链系统碰撞演化分析

对三球牛顿摆开展碰撞过程仿真,各初始参数与实验相同。初始时刻 1 球从 -115° 处无初速度释放,2 球和 3 球自然悬垂。三个小球的摆角变化如图 7 所示,角速度变化如图 8 所示。

由图 7 可见,一轮碰撞后,2 球、3 球向前摆动,1 球向后摆动。三球摆动的周期相同,并在静平衡位置经历下一次碰撞。由图 8 可见,碰撞结束后,3 球并未获得 1 球的全部能量。通过式(12),发现 1 球、2 球间的相对切向速度并未归零,接触点始终处于滑动摩擦状态。对式(15)积分可以得到法向冲量总功 $w_n = -1.0569 \times 10^{-4} \text{ J}$ 。恢复阶段法向冲量做功低于压缩阶段,此时 1 球和 2 球角速度分别更新为 $\omega_1 = 0.09 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = 3.82 \text{ rad/s}$ 。2 球与 3 球发生后继碰撞,三球的角速度更新为 $\omega_1 = 0.093 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = 0.090 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_3 = 3.729 \text{ rad/s}$,三球将同时向前摆动。注意到此时 1 球速度略大于 2 球,故 1、2 球间将发生二次碰撞。碰撞后三球进入自由摆动阶段,角速度更新为 $\omega_1 = 0.0899 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = 0.0273 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_3 = 3.7294 \text{ rad/s}$ 。图 9 给出了 1 球、2 球初次碰撞的状态变量演化历程。由式(11)可知,法向冲量相对法向

速度的导数是常量,在滑动摩擦条件下,图 9(b)中的法向冲量和切向冲量均随法向速度线性变化。切向速度在碰撞过程中逐渐降低,但并未进入黏滞状态。

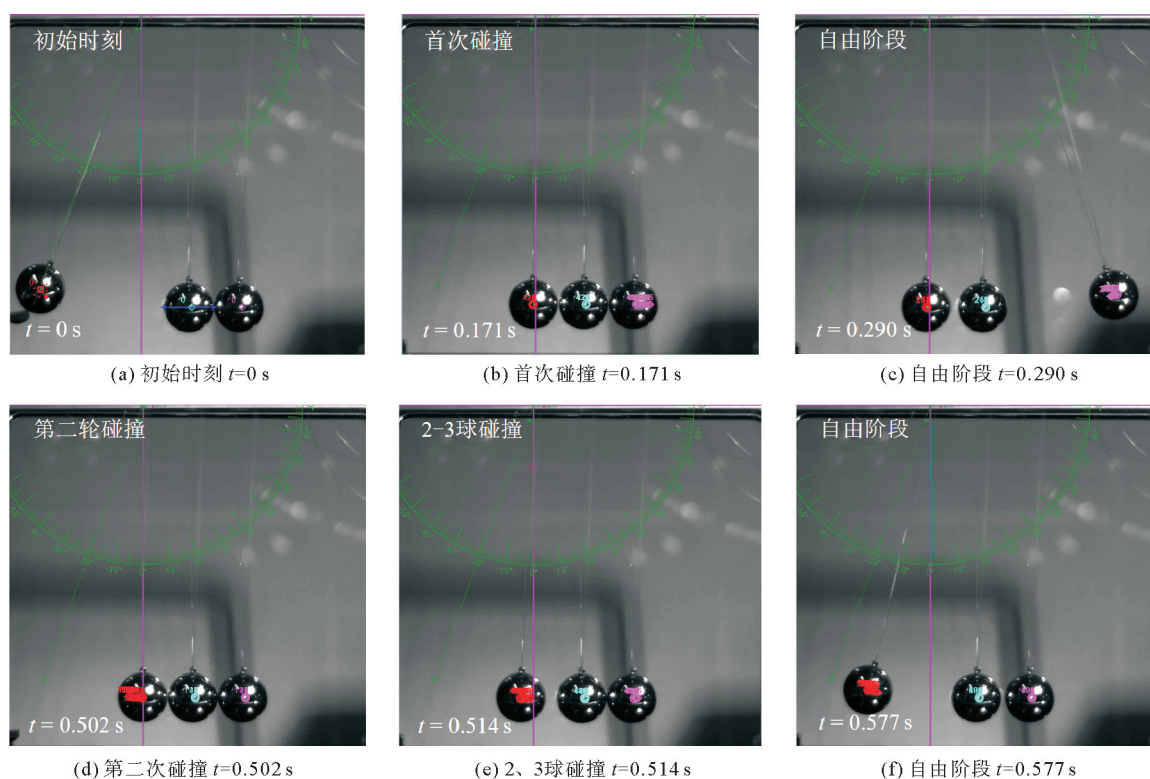


图 6 碰撞实验瞬时构型

Fig. 6 Instantaneous configuration of the collision experiment

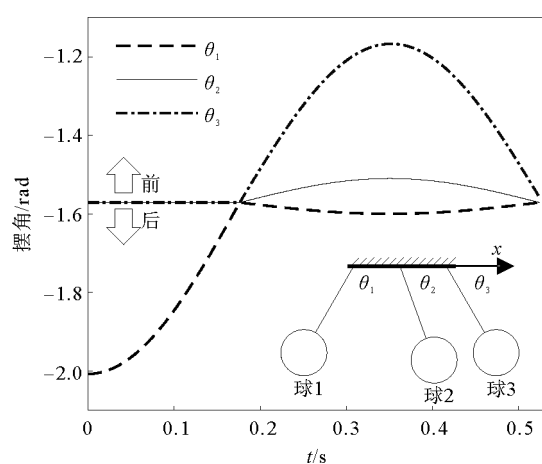


图 7 三球链系统转角变化

Fig. 7 Coordinate change of a three-ball chain system

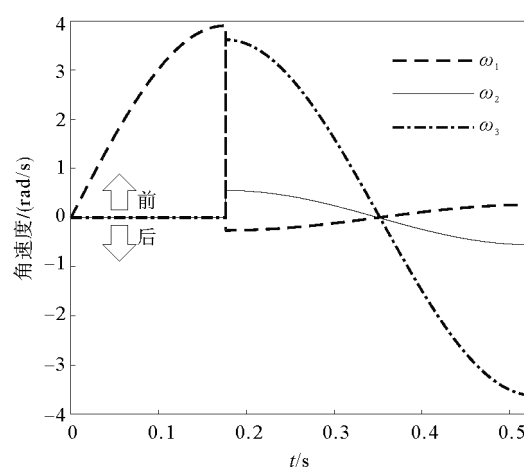


图 8 三球链系统角速度变化

Fig. 8 Velocity change of a three-ball chain system

3.2 碰撞参数分析

通过 3.1 节分析可见,按照碰撞次序求出全部冲量之后,还不能认定碰撞结束,原因在于碰撞会激发其他接触点的二次碰撞。下面将扼要讨论影响二次碰撞产生的因素。

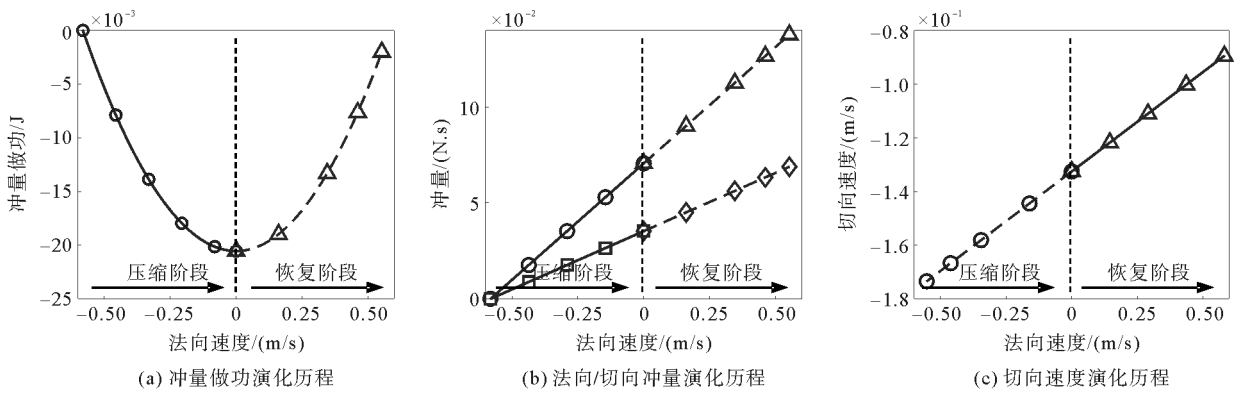


图 9 碰撞过程状态变量演化历程

Fig. 9 Evolution of state variables in the collision process

3.2.1 质量对二次碰撞的影响

改变 1 球的质量,并定义质量比 $\alpha = m_1/m_2 = m_1/m_3$,分析不同质量比下第一轮碰撞后三个小球的角速度,结果如图 10 所示。从图 10 可以看出,当 $0.3 < \alpha < 1$ 时,三球链系统完成第一轮碰撞后的速度为 $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$,三球均进入自由运动阶段,无需考虑二次碰撞对球链系统第一轮碰撞后速度的影响。当 $\alpha \geq 1$ 时,第一次碰撞后的速度为 $\omega_3 > \omega_1 > \omega_2$,1 球的质量与 2 球和 3 球相比较,二次碰撞将发生在 1 球和 2 球之间。

3.2.2 摩擦系数对二次碰撞的影响

设三球链系统中两个接触点的摩擦系数 μ_1, μ_2 相等,即 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 。分析三球链系统在不同摩擦系数下第一轮碰撞后的速度。仿真结果发现,如果保持三球质量一致,当摩擦系数 $\mu \leq 0.016$ 时,二次碰撞都发生在 1 球和 2 球之间。当摩擦系数 $\mu > 0.016$ 时,球链系统的速度为 $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$,三个小球在进行完第一次碰撞后就直接进入自由运动阶段,无需考虑二次碰撞给速度带来的影响。

3.3 状态演化过程分析

3.3.1 黏滞-滑动状态切换分析

本小节将开展单点摩擦碰撞的解析分析,验证所提方法描述黏滞-滑动状态切换的能力,并分析黏滞-滑动切换对后继动力学行为的影响。设一质量为 $m = 0.15 \text{ kg}$,半径为 $r = 0.2 \text{ m}$ 的逆时针自旋小球从 $h = 1 \text{ m}$ 的高度落下,并与地面发生碰撞,摩擦系数为 μ ,能量恢复系数取 0.9。代入式(12)和式(15),可将接触点的切向速度表示为:

$$v_\tau = v_\tau^0 - 3\mu(v_n - v_n^0). \quad (26)$$

切向速度演变为 0 表明 $v_\tau = 3\mu(v_n - v_n^0)$,若压缩阶段结束时切向速度为 0,则摩擦系数应满足 $\mu = -v_\tau^0/3v_n^0$;若摩擦系数固定,则小球的角速度应满足 $\omega = -3\mu v_n^0/r$ 。若 $\omega > -3\mu v_n^0/r$,则切向速度不可能在压缩阶段减小为 0;若 $\omega < -3\mu v_n^0/r$,则切向速度将在压缩过程中演变为 0。由上述分析可得出,黏滞-滑动状态的演化与初始速度和摩擦系数有关。设摩擦系数为 0.1,分析不同初始角速度和摩擦系数下接触点切向速度演化历程,结果如图 11 所示。

由图 11(a)可以看出,在相同摩擦系数下,切向速度的衰减速率相同。若小球角速度较小,将在压缩阶段进入黏滞状态。考虑平面自由刚体的质量阵为对角阵,式(19)中 K_{21} 恒为 0,即接触点切向相对速度一旦衰减为 0 则进入稳定的黏滞状态。随着初始角速度增大,黏滞-滑动切换点逐渐从压缩阶段迁到恢

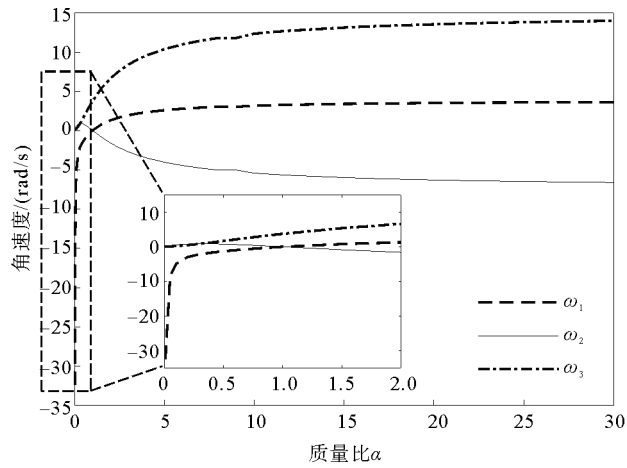


图 10 不同质量下的速度

Fig. 10 Velocity at different masses

复阶段,超过一定阈值后,接触点将始终保持滑动。从图 11(b)中可见,随着摩擦系数降低,黏滞-滑动(stick-slip)状态切换点由压缩阶段向恢复阶段转迁。摩擦系数取 0.09 时,切向速度恰好在压缩阶段结束时刻为 0。一旦摩擦系数取值小于 0.09,则接触点将始终处于滑动状态。

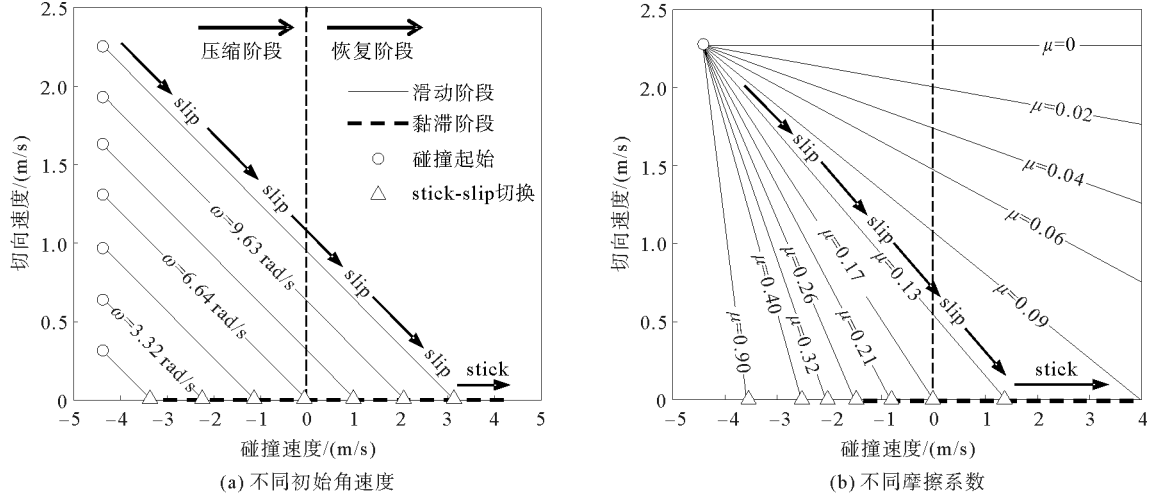


图 11 不同初始条件下的黏滞-滑动切换过程切向速度演化

Fig. 11 Evolution of tangential velocity during the stick-slip switching under different initial conditions

图 12 给出了两种情况下小球首次碰撞后的运动轨迹。由图 12(a)可见,初始角速度越大,则弹离地面后产生的水平速度越大。由图 12(b)可见,在摩擦系数的临界值 0.09 前后,小球运动情况呈现出较大的差异:若摩擦系数大于阈值 0.09,则接触点在碰撞过程中转迁至稳定的黏滞状态,结合式(25)可知,摩擦冲量在黏滞阶段不再变化,因此小球将以相同的速度弹离地面;反之则永远不会黏滞,此时摩擦冲量由摩擦系数主导,摩擦系数越小,碰撞后产生的水平速度越小。

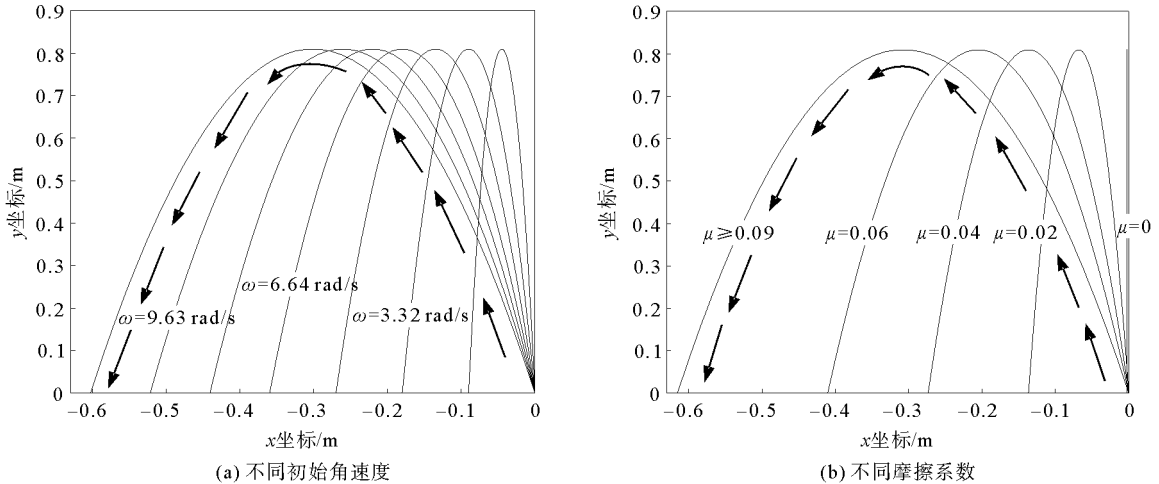


图 12 不同初始条件下的碰后轨迹

Fig. 12 Trajectories after collision under different initial conditions

3.3.2 空间碰撞状态演化分析

3.3.1 节利用摩擦碰撞的状态演化方程分析了接触点的一维黏滞-滑动切换行为,在空间摩擦碰撞问题中,切向速度演化将呈现出更加复杂的特点。设某多体系统的冲量刚度矩阵为 $\mathbf{K} = \text{kron}(\mathbf{A}, \mathbf{i}) + \text{kron}(\mathbf{B}, \mathbf{j}) + \text{kron}(\mathbf{C}, \mathbf{k})$, 其中 kron 表示 Kronecker 张量积, $\mathbf{A} = [8, -2, 1]$, $\mathbf{B} = [-2, 3, -1]$, $\mathbf{C} = [1, -1, 5]$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示总体坐标系的三个基矢量。图 13 列出了不同摩擦系数下接触面相对速度演化的相轨迹图。

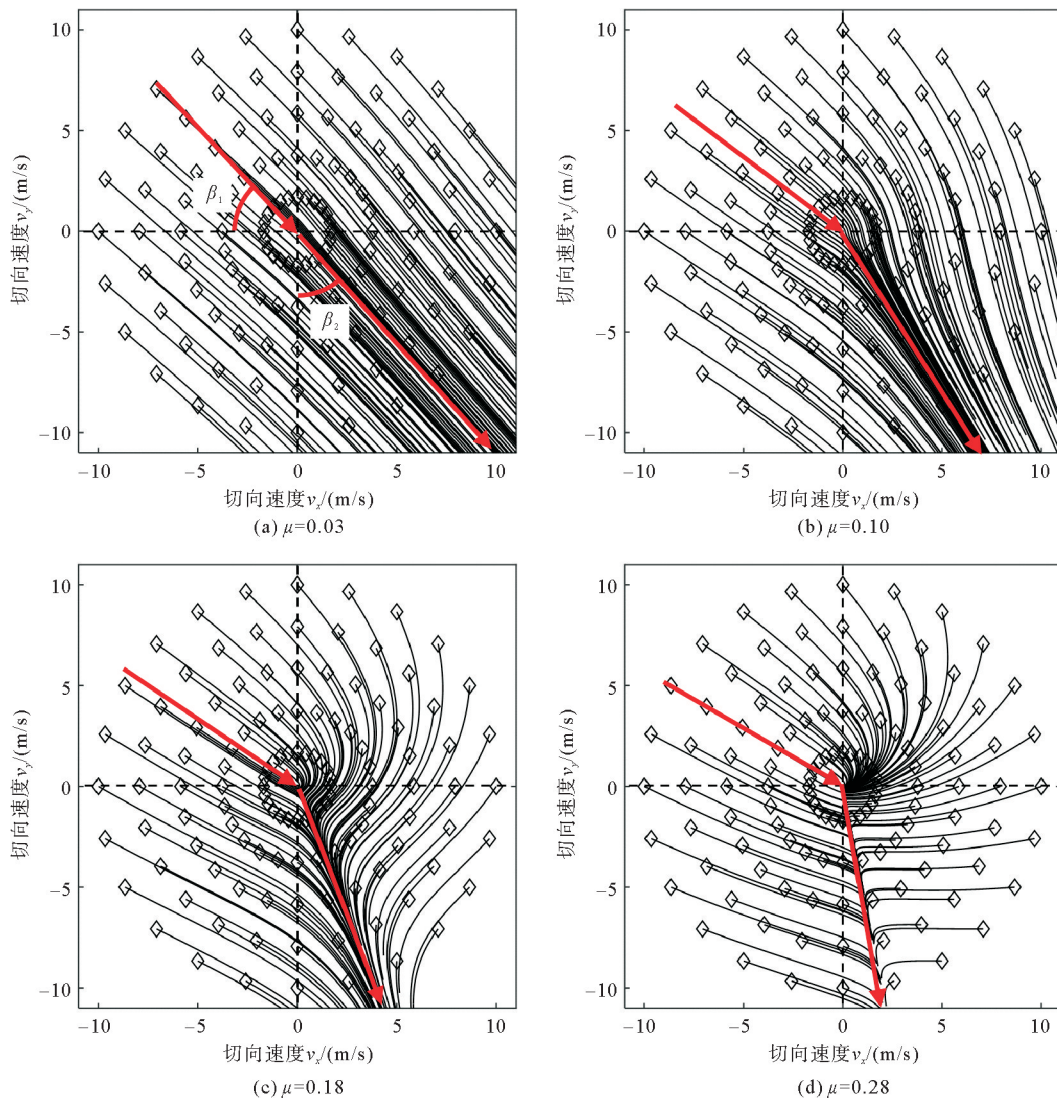


图 13 接触面相对速度演化轨迹

Fig. 13 Relative velocity evolution trajectory on the contact surface

实际上,将式(19)拓展到三维碰撞问题,得到平面摩擦问题的黏滞-滑动切换判据为:

$$(\mathbf{K}^{-1})_{13}^2 + (\mathbf{K}^{-1})_{23}^2 \leq \mu^2 (\mathbf{K}^{-1})_{33}^2. \quad (27)$$

将冲量刚度阵以及摩擦系数代入式(27)不成立,因此静摩擦状态是不稳定的。从静摩擦状态切换到滑动状态后,碰撞点在接触面内的相对运动速度方向将保持不变,但与进入静摩擦时的相对速度方向不同。可以验证,若 $dv_x/dv_y = \tan \beta$,则由三维碰撞问题的状态演化方程可得:

$$\mu(K_{22} - K_{11}) \cos \beta \sin \beta + \mu K_{12} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + K_{13} \sin \beta - K_{23} \cos \beta = 0. \quad (28)$$

为消除三角函数,令 $\sin \beta = 2t/(2+t^2)$ 、 $\cos \beta = (1-t^2)/(1+t^2)$,将式(28)改写为参数 t 的一元四次方程:

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0. \quad (29)$$

式中: $a = K_{23} - \mu K_{12}$, $b = 2K_{13} - 2\mu(K_{22} - K_{11})$, $c = 6\mu K_{12}$, $d = 2K_{13} + 2\mu(K_{22} - K_{11})$, $e = -K_{23} - \mu K_{12}$ 。

由于一元四次方程最多只能有 4 个实根,因此满足式(28)的 β 只能有 4 个。可以验证本例中一元四次方程的实根只有两个,这两个方向称为定向滑动方向。表 1 列出了图 13 中定向滑动方向 β_1 和 β_2 随摩擦系数变化的情况。当摩擦系数取特例 $\mu = 0$ 时, $\tan \beta = -1$,因此两个滑动方向恰好同向(为 45°)。随着摩擦系数增大, β_1 和 β_2 逐渐减小。当摩擦系数达到黏滞-滑动切换阈值时, β_1 减小到 30.21° , β_2 减小到

9.50°。从图 13 可见,相轨迹一旦与图中射线相交就只能沿这些射线运动。上述结论似乎引发这样的矛盾:速度分量沿坐标轴分布时,为何会向非坐标轴方向演化?实际上,不能将自由刚体碰撞的结论迁移到多体系统的碰撞过程中。自由刚体的冲量刚度矩阵通常为对角阵,因此相对速度一定沿初始方向演化。但本例中,推导冲量刚度矩阵的广义力变换阵并不单纯是由碰撞刚体的运动学参数推导的,而是受到多体系统一系列内接物体的影响,导致了演化路径的改变。

表 1 定向滑动方向夹角 β_1 、 β_2 随摩擦系数变化情况

Table 1 Changes of the angle β_1 , β_2 of the directional sliding direction with the friction coefficient

夹角	摩擦系数 μ															
	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.25	0.26	0.28	0.30
$\beta_1/(^\circ)$	44.02	42.24	40.67	39.27	38.02	36.91	35.91	35.01	34.20	33.47	32.80	32.19	31.63	31.12	30.65	30.21
$\beta_2/(^\circ)$	44.00	41.70	39.30	36.70	33.90	31.10	28.30	25.50	22.90	20.50	18.20	16.10	14.20	12.50	10.90	9.50

4 结论

本研究建立了三球链系统单点摩擦碰撞问题的状态演化方程,确定了黏滞-滑动切换准则,讨论了质量和摩擦系数对二次碰撞的影响,并实验验证了仿真的准确性。主要结论如下。

1) 使用能量恢复系数表征摩擦碰撞状态演化中的能量耗散,避免了传统牛顿恢复系数导致的碰撞后能量不降反增的运动失真问题;

2) 初始速度与摩擦系数共同影响了黏滞-滑动切换以及碰后动力学行为。初始速度与碰撞速度成线性关系,而摩擦系数在一定阈值内对摩擦冲量起主导作用。不稳定的静摩擦状态下,切向速度相轨迹一旦与定向滑动射线相交,则沿定向滑动方向运动;

3) 质量比通过冲量刚度矩阵影响三球链系统二次碰撞的次序,摩擦系数影响摩擦力冲量的演化历程。但摩擦系数超过阈值 0.016 后,对摩擦冲量不再起主导作用,系统状态的改变不影响二次碰撞的次序,未来可进一步研究多质量分布下阈值的普适性规律;

4) 在小摆角下实验结果和仿真结果吻合程度高,在大摆角下小球和摆绳不易对心,产生一定的误差,但宏观规律基本一致。

本研究的局限性包括实验中碰撞压缩和恢复阶段的瞬态特征未能直接测量得到,摩擦系数阈值的结论需多组对比实验进一步验证,这些问题将作为后续研究的重点方向。

参考文献:

- [1] 孙昊,刘铸永,刘锦阳. 机器人单足系统沙土跳跃刚-散耦合动力学分析[J]. 力学学报,2022,54(12):3486-3495.
SUN Hao,LIU Zhuoyong,LIU Jinyang. Rigid-discrete coupling dynamic analysis of robot mono-pedal system jumping in sand[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2022,54(12):3486-3495.
- [2] FLORES P. Contact mechanics for dynamical systems: A comprehensive review[J]. Multibody System Dynamics,2022,54(2):127-177.
- [3] ZHAO P F,LIU J G,WU C C,et al. A spring-damping contact force model considering normal friction for impact analysis[J]. Nonlinear Dynamics,2021,105(2):1437-1457.
- [4] WANG K,TIAN Q,HU H Y. Nonsmooth spatial frictional contact dynamics of multibody systems[J]. Multibody System Dynamics,2021,53(1):1-27.
- [5] KELLER J B. Impact with friction[J]. Journal of Applied Mechanics,Transactions ASME,1986,53(1):1-4.
- [6] PFEIFFER F,FOERG M,ULBRICH H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2006,195(50):6891-6908.
- [7] 姚文莉,岳嵘. 有争议的碰撞恢复系数研究进展[J]. 振动与冲击,2015,34(19):43-48.
YAO Wenli,YUE Rong. Advance in controversial restitution coefficient study for impact problems[J]. Journal of Vibra-

- tion and Shock, 2015, 34(19): 43-48.
- [8] LANKARANI H M. A Poisson-based formulation for frictional impact analysis of multibody mechanical systems with open or closed kinematic chains[J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 122(4): 489-497.
- [9] DJERASSI S. Three-dimensional, one-point collision with friction[J]. Multibody System Dynamics, 2012, 27(2): 173-195.
- [10] CROSS R. Oblique angle collisions of two pendulum balls[J]. American Journal of Physics, 2022, 90(7): 506-512.
- [11] CROSS R. The effect of very small ball gaps in Newton's cradle[J/OL]. European Journal of Physics, 2021, 42(2). DOI:10.1088/1361-6404/abc093.
- [12] 王海明, 张欣刚, 姚文莉. 基于 LuGre 摩擦模型的两轮自平衡车系统动力学[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2023, 42(5): 108-116.
WANG Haiming, ZHANG Xingang, YAO Wenli. System dynamics of two-wheel self-balance vehicle based on LuGre friction model[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2023, 42(5): 108-116.
- [13] COSIMO A, CAVALIERI F J, CARDONA A, et al. On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 102(4): 1997-2016.
- [14] DOCQUIER N, LANTSOGHT O, DUBOIS F, et al. Modelling and simulation of coupled multibody systems and granular media using the non-smooth contact dynamics approach[J]. Multibody System Dynamics, 2020, 49: 181-202.
- [15] CEANGA V, HURMUZLU Y. A new look at an old problem: Newton's cradle[J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 2001, 68(4): 575-583.
- [16] LIU C S, ZHAO Z, BROGLIATO B. Frictionless multiple impacts in multibody systems. I. Theoretical framework[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2008, 464(2100): 3193-3211.
- [17] LIU C S, ZHAO Z, BROGLIATO B. Frictionless multiple impacts in multibody systems. II. Numerical algorithm and simulation results[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2009, 465(2101): 1-23.
- [18] RODRIGUEZ A, BOWLING A. Study of Newton's cradle using a new discrete approach[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 33(1): 61-92.
- [19] 段文山, 彭晶. 一维颗粒链中颗粒转动效应的研究[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2020, 56(3): 43-47.
DUAN Wenshan, PENG Jing. Study on particle rotation effect in one-dimensional particle chain[J]. Journal of Northwest Normal University (Natural Science), 2020, 56(3): 43-47.
- [20] DANCZYK M, PUNCH O, FULLARD L, et al. A comparison of models of linear collisions between spherical particles in the pendular regime[J/OL]. Powder Technology, 2022, 398. DOI:10.1016/j.powtec.2022.117112.
- [21] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 86-93.
- [22] STRONGE W J. Rigid body collisions with friction[J]. Proceedings of Royal Society of London, 1990, A431: 169-181.

(责任编辑: 齐敏华)